

文章编号:1000-8055(2011)10-2237-08

传热时间迟滞影响的薄板热气动弹性耦合 振荡模型

李凯伦¹, 张家忠¹, 周振堂²

(1. 西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049;
2. 白城师范学院 机电工程系, 吉林 白城 137000)

摘 要: 为了对高超声速下飞行器薄壁结构的振动行为进行研究,建立了一种考虑传热时间迟滞影响的二维无限长薄板的热气动弹性耦合振荡模型.同时,给出了只考虑有限历史时间影响的板内温度分布表达式,并对提出的温度表达式的精确性进行了数学证明,从而将以往被忽略掉的热应力产生的板内力矩引入薄板振动方程.数值模拟结果表明:气动力是薄板振动的主要驱动力,板内力的作用相当于外部预紧力,而板内力矩的变化会驱使薄板进行小振幅振动.综合以上三种因素,对薄板在这三种因素耦合情况下的振动行为进行了研究,发现在来流马赫数较大时,薄板会进入十分复杂的振动状态.最后,通过非线性动力学理论对薄板的振动行为进行了分析,发现了薄板振动中的分岔、混沌等现象,以及通向该类现象的途径.

关 键 词: 薄板振动; 热气动弹性耦合; 时间迟滞; 屈曲; 分岔; 混沌

中图分类号: V414.3⁺3

文献标志码: A

Aerothermoelastic coupling dynamic model of panel flutter with time delay of heat transfer

LI Kai-lun¹, ZHANG Jia-zhong¹, ZHOU Zhen-tang²

(1. School of Energy and Power Engineering,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. Department of Mechanical and Electrical Engineering,
Baicheng Normal College, Baicheng Jilin 137000, China)

Abstract: A two-dimensional infinite aerothermoelastic dynamic model of panel flutter, in which the heat transfer with time delay has been considered, was established to investigate the flutter behaviors of the panel structures of aircraft in hypersonic flow. In this study, a new model for the temperature distribution in the panel was presented considering only the finite temporal history effects, and proved mathematically for the accuracy. Then, the internal moment in the panel, which is neglected in existing model, was successfully introduced into the panel flutter model. From the numerical results, it can be seen that the aerodynamic pressure is a main driving force of the panel flutter, the internal force acts as an external pre-tightening force on two sides of the panel, and the internal moment drives vibration of the panel with small amplitude. Taking all the factors mentioned above into account, the vibration of the panel under aerothermoelastic coupling was studied in detail. It is found that the vibration becomes very complex as the Mach number is large. Finally, some kind of nonlinear dynamical behaviors were captured and analyzed by nonlinear dynamical theory.

收稿日期:2010-10-26; **修订日期:**2011-03-12

基金项目:新世纪人才计划(NCET-07-0685)

作者简介:李凯伦(1983—),男,陕西大荔人,博士生,主要从事薄壁结构的热-流-固耦合研究.

Key words: panel flutter; aerothermoelastic coupling; time delay; buckling; bifurcation; chaos

符号表

a	板长	c_p	薄板的比热容
$c_{p,rs}$	来流空气的比定压热容	T	温度
$c_{V,lm}$	来流空气的比定容热容	T_f	薄板外壁温度的时均值;同时也是薄板内壁的温度值
C_∞	来流空气的声速	u	空气流动速度;同时也是沿 x 轴方向位移
D	抗弯刚度	U_∞	来流速度
E	弹性模量	w	沿 z 轴方向位移
h	板厚	α	热膨胀系数
Ma	马赫数	α_t	热扩散率
p	静压	γ	比热容比
Pr	普朗特数	κ	导热系数
q	动压	ν	泊松比
R	理想气体常数	ρ	密度
R_f	稳态温度恢复因子		
R_u	非稳态温度恢复因子		

下标

∞	来流参数	sp	支撑结构参数
p	薄板参数	e	薄板外表面参数

目前,高超声速飞行器的外部蒙皮多采用一些浅壳薄壁结构,浅壳薄壁结构的振动问题由来已久,尤其对高超声速的情况下,由气动加热引起的薄壁结构内部的热应力不可忽略,薄壁结构在气动力、内部热应力以及惯性力的作用下进行振动,其振动行为十分复杂,学者们已经对此展开了广泛的研究^[1-7]. 由于气动加热效应产生在薄板(薄壁结构)表面,热应力则产生在薄板内部,而传热需要时间,所以当前时刻薄板内部的热应力并不仅仅受当前时刻其外壁气动加热效应的影响,而是在此前一段足够长时间内,薄板外壁气动加热在历史时间上的积分效应产生的结果. 对于诸如此类的多场问题,一般多存在时间多尺度问题,或时间迟滞效应,并非同步. 在求解过程中,气动力、惯性力都是通过求解流体、固体的控制方程而得到当前时刻的瞬时值,而薄板内部温度梯度的确定,却需要考虑薄板外壁气动加热的时间历史效应. 在以往的数学模型中^[8-9],多采用集总参数法,忽略薄板内部热阻,忽略了传热的时间迟滞,假设表面温度瞬间波及薄板内部,这样忽略了薄板在板厚方向上的温度梯度,也忽略了热应力在板厚方向上不均匀分布引起的板内力矩,板内力矩对薄板振动的影响很大,因此,以前的数学模型

并不能准确地描述薄板的真实运动状态. 所以,精确的薄板热气动弹性耦合模型的建立,需要考虑传热时间迟滞的影响,不应该把传热看作一个瞬时的过程.

本文针对薄板的热气动弹性耦合问题,建立了考虑传热时间迟滞影响的数学模型,不再将传热看作一个瞬时的过程,而是考虑了薄板外壁面气动加热的历史效应,更精确地计算了沿板厚方向的温度梯度,从而得到了由热应力沿板厚方向的不均匀分布引起的板内力矩,并且研究了其对薄板振动的影响. 从而为研究高超声速下飞行器的薄壁结构,提供了更为准确的数学模型. 在建立数学模型的基础上,本文通过 Galerkin 方法离散方程并用 Runge-Kutta 方法对控制方程进行数值模拟,研究了热气动弹性耦合影响下,不同的参数变化对薄板振动状态的影响.

此外,对于在热气动弹性耦合作用下薄板的振动问题,由于其振动行为具有强非线性,譬如从静止状态到周期振动再到屈曲、混沌等分岔现象. 因此采用非线性理论对薄板振动的分岔行为进行分析,亦是此研究方向的一个热点. 因此,本文亦对薄板振动的非线性行为,如混沌、分岔等行为进行了研究.

1 数学模型的建立

1.1 气动加热与气动载荷

薄板振动的示意图如图 1 所示, 假设薄壁结构在来流速度 U_∞ 的状态下经历了足够长的时间, 在时均效应上, 薄板通过来流的黏性摩擦加热效应与薄板外壁的散热效应达到了平衡, 此时薄板外壁温度由于受薄板振动以及气体可压缩性的影响而在时均值上下波动, 而薄板内部的温度则已经趋于稳定并等于此时均值, 通过流动过程中的能量守恒方程^[10], 可得

$$c_{p,rs} T + \frac{u^2}{2} = c_{p,rs} T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} \quad (1)$$

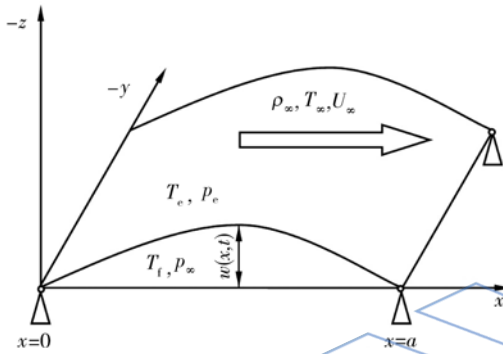


图 1 薄板振动示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the panel flutter

并由关系式

$$\begin{aligned} c_{p,rs} - c_{v,lm} &= R, \\ \gamma &= \frac{c_{p,rs}}{c_{v,lm}}, \\ c_\infty^2 &= \gamma R T_\infty \end{aligned}$$

式(1)可以转化为

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \right] \quad (2)$$

因为无滑移边界条件, 所以壁面上 $u = 0$, 同时引入 $R_f = \sqrt{Pr}$, 表示稳态温度恢复因子, 因此薄板外壁温度的时均值, 同时也是薄壁内壁温度值, 可表示为

$$T_f = T_\infty + R_f \frac{\gamma-1}{2} Ma_\infty^2 T_\infty \quad (3)$$

其中 T_∞ 表示薄板在初始状态时的温度, 同时也表示来流的气体温度. 根据活塞理论^[11], 薄板外表面的压力值为

$$p_e = p_\infty + \frac{2q_\infty}{Ma_\infty} D_t \omega \quad (4)$$

其中 $D_t \omega = \omega_{,x} + \frac{\omega_{,t}}{U_\infty}$, p_∞ 表示薄板内部压力值,

同时也表示来流的压力值. 通过压力与温度的等熵关系, 可以由式(4)推导出压力脉动引起的温度脉动

$$T_e = T_\infty + (\gamma-1) Ma_\infty T_\infty D_t \omega \quad (5)$$

正如前面所说, 薄板外表面的温度在时均值上下波动, 通过已有的时均值 T_f 对式(5)的温度脉动进行修正, 即可以得到外表面的温度表达式

$$T_e = T_f + R_u (\gamma-1) Ma_\infty T_\infty D_t \omega \quad (6)$$

式中 R_u 表示非稳态温度恢复因子, 表示传热及生成热的效率的概念.

1.2 板内导热问题

事实上板内温度的求解是一个偏微分方程的初边值问题, 假若只考虑薄板在板厚方向上的导热, 则可以将此问题看作一个一维导热问题, 内壁温度稳定在 T_f , 外壁温度在时均值附近脉动, 脉动值为 T_e , 设板厚为 h , 令板内温度分布写为 $T(x, z, t)$, 则微分方程描述为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_d} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, z, 0) = T_f \\ T(x, h/2, t) = T_f \\ T(x, -h/2, t) = T_e \end{cases} \quad (7)$$

对于式(7)的微分方程, 数学上存在理论解^[12]为

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= T_f + \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \Delta T_e(t) + \\ &\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\Delta T_e(0) + \int_0^t \Delta T_e'(\tau) e^{-n^2 \frac{\pi^2}{\lambda} \tau} d\tau \right] \cdot \\ &e^{-n^2 \frac{\pi^2}{\lambda} t} \sin n\pi \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\Delta T_e = T_e - T_f = R_u (\gamma-1) Ma_\infty T_\infty D_t \omega$$

并且

$$\lambda = \frac{c_p \rho_p h^2}{\pi^2 k}$$

令

$$\Delta T_f = T_f - T_\infty = R_f \frac{\gamma-1}{2} Ma_\infty^2 T_\infty$$

则板内当前温度与初始温度的差 $\Delta \tilde{T}_p$ 可以写为

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{T}_p &= T(x, z, t) - T_\infty = \\ &\Delta T_f + \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \Delta T_e(t) + \\ &\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left[\Delta T_e(0) + \int_0^t \Delta T_e'(\tau) e^{-n^2 \frac{\pi^2}{\lambda} \tau} d\tau \right] \cdot \\ &e^{-n^2 \frac{\pi^2}{\lambda} t} \sin n\pi \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $\Delta \tilde{T}_p$ 表达式最后一项括号内含有从初始时刻到当前时刻的积分项,这使得长时间的求解对计算量要求巨大,而由于括号外含有 $e^{-n^2 \frac{t}{\lambda}}$ 负指数项,说明上游时刻的外壁温度对当前时刻板内热应力分布是呈指数衰减的,距离当前时刻越久的上游时刻,则其影响越小,由此可以对表达式(9)做出改进

$$\begin{aligned} \Delta T_p &= T(x, z, t) - T_\infty = \\ \Delta T_i &+ \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \Delta T_e(t) + \\ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} &\left[\int_{t-\Delta t}^t \Delta T'_e(\tau) e^{n^2 \frac{\tau}{\lambda}} d\tau \right] \cdot \\ &e^{-n^2 \frac{t}{\lambda}} \sin n\pi \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

即只需要对距当前时刻 Δt (足够长即可) 时间段内的上游时刻壁面温度值导数项进行积分,便可以得到足够精确的板内温度分布. 下面给出证明.

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{T}_p - \Delta T_p| &= \left| \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\Delta T_e(0) + \right. \right. \\ &\left. \int_0^{t-\Delta t} \Delta T'_e(\tau) e^{n^2 \frac{\tau}{\lambda}} d\tau \right] e^{-n^2 \frac{t}{\lambda}} \sin n\pi \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \right| \leq \\ &\left| \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\Delta T_e(0) + \int_0^{t-\Delta t} \Delta T'_e(\tau) e^{n^2 \frac{\tau}{\lambda}} d\tau \right] e^{-n^2 \frac{t}{\lambda}} \right| \leq \\ &\left| \frac{2}{\pi} \left[\Delta T_e(0) + \int_0^{t-\Delta t} \Delta T'_e(\tau) e^{\frac{\tau}{\lambda}} d\tau \right] e^{-\frac{t}{\lambda}} \right| \end{aligned}$$

由积分中值定理可知,在 $[0, t - \Delta t]$ 内存在 ξ 使得

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\Delta t} \Delta T'_e(\tau) e^{\frac{\tau}{\lambda}} d\tau &= \Delta T'_e(\xi) \int_0^{t-\Delta t} e^{\frac{\tau}{\lambda}} d\tau = \\ &\lambda \Delta T'_e(\xi) (e^{\frac{t-\Delta t}{\lambda}} - 1) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{T}_p - \Delta T_p| &\leq \\ \left| \frac{2}{\pi} [\Delta T_e(0) + \lambda \Delta T'_e(\xi) (e^{\frac{t-\Delta t}{\lambda}} - 1)] e^{-\frac{t}{\lambda}} \right| &\leq \\ \frac{2}{\pi} [|\Delta T_e(0)| + |\lambda \Delta T'_e(\xi) (e^{\frac{t-\Delta t}{\lambda}} - 1)|] e^{-\frac{t}{\lambda}} &\leq \\ \frac{2}{\pi} (|\Delta T_e(0)| + \lambda |\Delta T'_e(\xi)|) e^{-\frac{\Delta t}{\lambda}} \end{aligned}$$

若 ΔT_u 一阶连续可导,则存在正整数 N 使得

$$N \geq \frac{2}{\pi} (|\Delta T_e(0)| + \lambda |\Delta T'_e(\xi)|)$$

则对于任意的 $\epsilon > 0$, 要求 $|\Delta \tilde{T}_p - \Delta T_p| \leq \epsilon$, 只需要

$$N e^{-\frac{\Delta t}{\lambda}} \leq \epsilon$$

即

$$\Delta t \geq -\lambda \ln \frac{\epsilon}{N} \quad (11)$$

所以只要 Δt 足够大,便可以保证用表达式(10)代替表达式(9)带来的误差在允许范围之内. 然而在实际的数值计算中, N 值无法给出,因此 Δt 无法由式(11)给出,实际数值计算中采用下面的方法.

令

$$\begin{aligned} \Delta T_{p,m} &= T(x, z, t) - T_\infty = \\ \Delta T_i &+ \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \Delta T_e(t) + \\ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} &\left[\int_{t-m\Delta t'}^t \Delta T'_e(\tau) e^{n^2 \frac{\tau}{\lambda}} d\tau \right] \cdot \\ &e^{-n^2 \frac{t}{\lambda}} \sin n\pi \left[-\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

选定一个基本的 $\Delta t'$ 和误差 ϵ , 当

$$\iint_{x,y} |\Delta T_{p,m+1} - \Delta T_{p,m}| dx dy \leq \epsilon \quad (12)$$

则令: $\Delta t = (m+1)\Delta t'$, 本研究采用此方法求出合适的 Δt . 然后用式(10)求出板内初始时刻与当前时刻的温差.

1.3 薄板控制方程

二维无限长薄板振动的原始方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + (N_x + N_e) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + l(x, t) = 0 \quad (13)$$

其中 M_x 表示板内的内部力矩, N_x 表示板内力, N_e 表示外加预紧力. $l(x, t)$ 表示气动力和惯性力, 可以写为

$$l(x, t) = -\rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (p_\infty - p_u) \quad (14)$$

结合板内热应力的表达式以及冯·卡门薄板大变形理论可得板内部应力分布为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (1+\nu) \alpha_p \Delta T_p \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\Delta T_p = T(x, z, t) - T_\infty$, 表示薄板当前时刻与初始时刻的温度差. 对薄板内部应力进行积分可得

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E h \alpha_{sp} \Delta T_{sp}}{1-\nu^2} + \frac{E h}{2a(1-\nu^2)} \cdot \\ &\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{\alpha_p E}{a(1-\nu)} \int_0^a dx \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T_p dz \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\alpha_p E}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T_p z dz \quad (17)$$

其中 $\Delta T_{sp} = T_i - T_\infty$, 表示支撑结构当前时刻与初始时刻的温度差. 将上面的内力矩、内力以及惯性力与气动力项代入二维薄板的原始方程, 同时对控制方程无量纲化, 简化得到无量纲化的热气动弹性耦合的二维薄板振动方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \Phi \hat{R}_u \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - \Theta \hat{R}_u \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} + \\ & \left[-12\Gamma \frac{\hat{R}_t}{1+\nu} + 12\hat{R}_t - R_e \right] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \\ & 6 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} + 6\Phi \hat{R}_u \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \\ & 6\Theta \hat{R}_u \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} d\bar{x} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \Lambda \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \Lambda \frac{\Theta}{\Phi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \\ & \frac{12\hat{R}_u \Phi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} \left[\int_{i-\Delta i}^i \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{\eta}} \right) e^{n^2 \frac{\bar{\eta}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right] \cdot \\ & e^{-n^2 \frac{\bar{\Delta i}}{\lambda}} + \frac{12\hat{R}_u \Theta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2} \left[\int_{i-\Delta i}^i \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{\eta}^2} \right) \cdot \right. \\ & \left. e^{n^2 \frac{\bar{\eta}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right] e^{-n^2 \frac{\bar{\Delta i}}{\lambda}} - \frac{24\hat{R}_u \Phi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \int_0^1 d\bar{x} \cdot \\ & \left[\int_{i-\Delta i}^i \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{\eta}} \right) e^{n^2 \frac{\bar{\eta}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right] e^{-n^2 \frac{\bar{\Delta i}}{\lambda}} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{24\hat{R}_u \Theta}{\pi^2} \cdot \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \int_0^1 d\bar{x} \left[\int_{i-\Delta i}^i \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\eta}^2} \right) e^{n^2 \frac{\bar{\eta}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right] \cdot \\ & e^{-n^2 \frac{\bar{\Delta i}}{\lambda}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

方程中无量纲变量的表达式及相关系数如下所示:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\rho_p a^4 h}{D}}, \\ \Phi &= \frac{h}{a}, \quad \Gamma = \frac{\alpha_{sp}}{\alpha_p}, \\ \Theta &= \frac{1}{U_\infty} \frac{h}{\tau}, \quad R_e = \frac{N_e a^2}{D}, \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Lambda = \frac{2a^3 q_\infty}{DMa_\infty}, \\ \hat{R}_u &= R_u(\gamma-1)Ma_\infty T_\infty \frac{\alpha_p}{\Theta^2} (1+\nu), \\ \hat{R}_t &= \frac{1}{2} R_t(\gamma-1)Ma_\infty^2 T_\infty \frac{\alpha_p}{\Theta^2} (1+\nu) \end{aligned}$$

同时方程(18)的边界条件和初始条件如下:

$$\begin{aligned} \bar{w}(0, \bar{t}) &= \bar{w}(1, \bar{t}) = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}(0, \bar{t}) &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}(1, \bar{t}) = 0; \\ \bar{w}(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}), \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, 0) = 0. \end{aligned}$$

1.4 Galerkin 方法

无量纲未知量 $\bar{w}$ 可以由空间上的基函数展开为

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{r=1}^N \bar{w}_r(\bar{t}) \sin(r\pi\bar{x}) \quad (19)$$

将式(19)代入方程(18), 同时两边积分便可得到离散化的薄板控制方程, 并且将式(19)化简为一阶常微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}}_s &= \bar{w}_{s+N \text{ mode}} \\ \dot{\bar{w}}_{s+N \text{ mode}} &= -b_1(s) \bar{w}_s - b_2(s) \bar{w}_{s+N \text{ mode}} - \\ & b_3(s) \bar{w}_{s+N \text{ mode}} - \sum_{r=1, r \neq s}^N b_4(s, r) \bar{w}_r - \\ & \sum_{r=1, r \neq s}^N b_5(s, r) \bar{w}_s \bar{w}_r^2 - \sum_{r=1, r \neq s}^N b_6(s, r) \bar{w}_s \bar{w}_{r+N \text{ mode}} - \\ & \sum_{r=1, r \neq s}^N b_7(s, r) \bar{w}_r - b_8(s, s) \bar{w}_s^3 - \\ & b_9(s, s) \bar{w}_s \bar{w}_{s+N \text{ mode}} - l_1(s) - l_2(s) - l_3(s) \bar{w}_s \end{aligned} \quad (20)$$

对以上薄板控制方程采用 Runge-Kutta 法求解. 同时, 为了对薄板的非线性行为进行分析, 通过式(20)可以求得控制方程的 Jacobian 矩阵如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\bar{w}}_s}{\partial \bar{w}_s} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{\bar{w}}_s}{\partial \bar{w}_r} = 0, \\ \frac{\partial \dot{\bar{w}}_s}{\partial \bar{w}_{s+N}} &= 1, \quad \frac{\partial \dot{\bar{w}}_s}{\partial \bar{w}_{r+N}} = 0, \\ \frac{\partial \dot{\bar{w}}_{s+N}}{\partial \bar{w}_s} &= -b_1(s) - \sum_{k=1, k \neq s}^N b_5(s, r) \bar{w}_r^2 - \\ & \sum_{k=1, k \neq s}^N b_6(s, r) \bar{w}_{r+N} - 3b_9(s, s) \bar{w}_s^2 - \\ & b_9(s, s) \bar{w}_{s+N} - l_3(s), \\ \frac{\partial \dot{\bar{w}}_{s+N}}{\partial \bar{w}_r} &= -b_4(s, r) - 2b_5(s, r) \bar{w}_s \bar{w}_r - b_7(s, r), \\ \frac{\partial \dot{\bar{w}}_{s+N}}{\partial \bar{w}_{s+N}} &= -b_2(s) - b_3(s) - b_8(s, s) \bar{w}_s, \\ \frac{\partial \dot{\bar{w}}_{s+N}}{\partial \bar{w}_{r+N}} &= -\sum_{r=1, r \neq s}^N b_6(s, r) \bar{w}_s \end{aligned} \quad (21)$$

方程(20)和(21)中的相关系数表达式如下所示:

$$\begin{aligned} b_1(s) &= (\pi s)^4 + \left[12\Gamma \frac{\hat{R}_t}{1+\nu} - 12\hat{R}_t + R_e \right] (\pi s)^2, \\ b_2(s) &= \Theta \hat{R}_u (\pi s)^2, \\ b_3(s) &= \Lambda \frac{\Theta}{\Phi}, \\ b_4(s, r) &= 2 \frac{\Phi \hat{R}_u}{\pi} (\pi r)^3 \frac{s}{s^2 - r^2} [1 - (-1)^{s+r}], \\ b_5(s, r) &= 3(\pi s)^2 (\pi r)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_6(s, r) &= -6\Theta\hat{R}_u(\pi s)^2 \frac{1 - (-1)^r}{\pi r}, \\
b_7(s, r) &= 2\Lambda r \frac{s}{s^2 - r^2} [1 - (-1)^{s+r}], \\
l_1(s) &= -\frac{24\hat{R}_u\Phi}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \cdot \\
&\quad \left\{ \sum_{r=1}^N (\pi r)^3 \frac{s}{s^2 - r^2} \cdot [1 - (-1)^{s+r}] \cdot \right. \\
&\quad \left. \int_{\bar{t}-\Delta\bar{t}}^{\bar{t}} \ddot{w}_s e^{n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right\} e^{-n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}}, \\
l_2(s) &= -\frac{12\hat{R}_u\Theta}{\pi^2} \cdot \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \left[(\pi s)^2 \int_{\bar{t}-\Delta\bar{t}}^{\bar{t}} \ddot{w}_s e^{n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}} \cdot d\bar{\eta} \right] e^{-n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}}, \\
l_3(s) &= \frac{24\hat{R}_u\Theta}{\pi^2} (\pi s)^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cdot \right. \\
&\quad \left[\sum_{r=1}^N \frac{1 - (-1)^r}{\pi r} \cdot \int_{\bar{t}-\Delta\bar{t}}^{\bar{t}} \ddot{w}_s e^{n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}} d\bar{\eta} \right] e^{-n^2 \frac{\bar{t}}{\lambda}} \right\}.
\end{aligned}$$

2 数值模拟结果及分析

2.1 不考虑气动加热效应的影响

当不考虑气动加热效应时,薄板内热应力为零,只有气动力会对薄板的运动状态产生影响,当来流马赫数小于5.3时,气动力产生的动能不足以使薄板产生振动,薄板处于静止状态,如图2所示.当来流马赫数大于5.4时,气动力使薄板产生周期振动,如图3所示.通过对系统的雅可比矩阵求特征值发现,当来流马赫数增大到5.4附近时,随着来流马赫数继续增大,系统在平衡位置的Jacobian矩阵出现了一对纯虚数特征根,而同时其他特征根具有非零实部.从非线性的角度来说,系统发生了Hopf分岔.

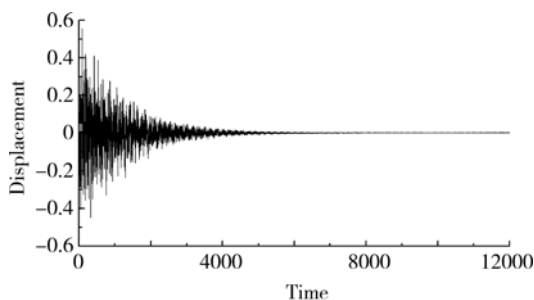


图2 薄板振动的时间历程图

Fig. 2 Time history of the panel flutter
($Ma_{\infty}=5.3$, $R_t=0$, $R_u=0$)

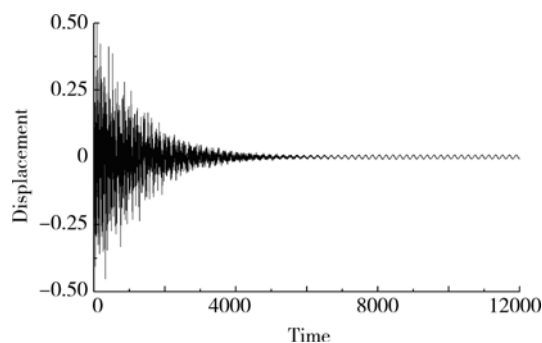


图3 薄板振动的时间历程图

Fig. 3 Time history of the panel flutter
($Ma_{\infty}=5.4$, $R_t=0$, $R_u=0$)

2.2 考虑稳态温度恢复因子 R_t 的影响

在相同的来流马赫数下,稳态温度恢复因子主要影响薄板内平均温度,板内平均温度会随着 R_t 的增大而增大.随着薄板内平均温度的增大,由于薄板在长度方向上的热膨胀以及薄板两端支撑的限制,导致其作用相当于薄板两端加上了预紧力.在来流马赫数和稳态温度恢复因子比较小时($Ma_{\infty} \leq 1.75$, $R_t \leq 0.1$),气动力以及气动加热产生的板内力都比较小,既不会振动也不会屈曲.

固定来流马赫数不变($Ma_{\infty}=1.75$),随着 R_t 的增大,板内力逐渐增大,当增大到 $R_t=0.2$ 附近时,薄板在原始平衡位置失去稳定性,进入屈曲状态,如图4所示.通过对其 Jacobian 矩阵进行分析,发现薄板在发生屈曲时,其 Jacobian 矩阵有一对共轭特征根的虚部消失并且转化成了两个不相等的实特征根,并且其他特征根的实部不为零.由非线性动力学理论可知,薄板在由静止进入屈曲状态时,系统发生了分岔.进入屈曲状态后,继续增大 R_t ,薄板的屈曲后位置会继续远离原始平衡位置.

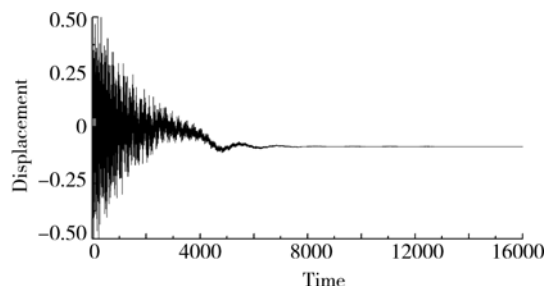


图4 薄板振动的时间历程图

Fig. 4 Time history of the panel flutter
($Ma_{\infty}=1.75$, $R_t=0.2$, $R_u=0$)

固定稳态恢复因子不变($R_f=0.1$),随着来流马赫数的增大,气动力的激励亦增大,来流马赫数比较小的时候,薄板静止.当增大到 $Ma_\infty=2.2$ 附近,薄板进入振动状态,如图 5 所示.继续增大来流马赫数到 $Ma_\infty=2.5$,薄板的原始平衡位置由稳定变得不稳定,薄板偏离原始平衡位置继续振动,如图 6 所示.

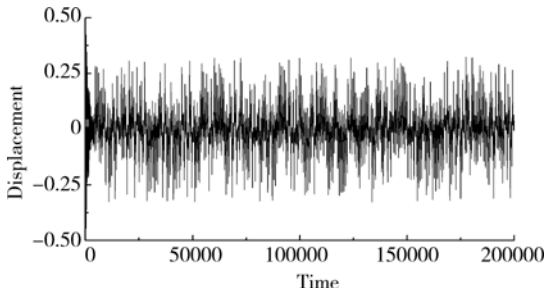


图 5 薄板振动的时间历程图

Fig. 5 Time history of the panel flutter
($Ma_\infty=2.2$, $R_f=0.1$, $R_u=0$)

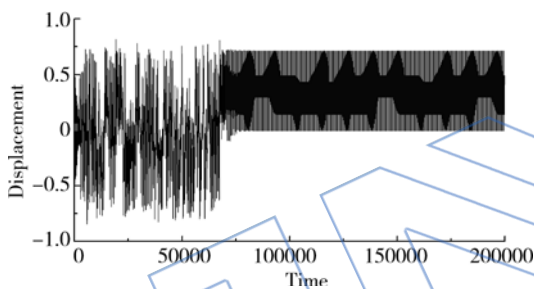


图 6 薄板振动的时间历程图

Fig. 6 Time history of the panel flutter
($Ma_\infty=2.5$, $R_f=0.1$, $R_u=0$)

由以上的计算可以看出, R_f 主要影响薄板内部热应力产生的板内力,使薄板在原始平衡位置变得不稳定,或者进入屈曲状态,或者突跳偏离原始平衡位置继续振动.图 7 给出了薄板振动状态随着 Ma_∞ 和 R_f 的变化规律.

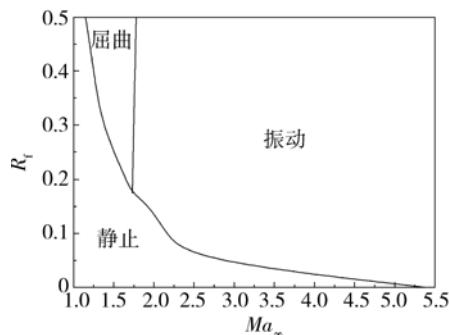


图 7 薄板振动状态随 Ma_∞ 和 R_f 的变化规律
Fig. 7 Behavior of panel flutter varies as the change of parameters Ma_∞ and R_f

2.3 考虑非稳态温度恢复因子 R_u 的影响

非稳态温度恢复因子 R_u 主要影响板厚方向上的温度梯度,温度梯度会影响板内应力在板厚方向上的不平衡分布,而此热应力的不平衡分布会产生板内力矩,因此 R_u 的主要作用是影响薄板内部热应力产生的板内力矩(虽然 R_u 也会影响板内力,但是作为薄板振动驱动因素来说,由 R_u 产生的板内力矩是本小节中薄板振动的主要原因,由 R_u 产生的板内力对薄板振动影响甚微,因此下文不再讨论 R_u 产生的板内力的影响). $R_u=0$ 表示不考虑薄板内部热应力产生的弯矩.随着 R_u 的增大,板内热应力产生的弯矩会使薄板变形并且进入振动状态,如图 8 所示.而热应力的变化与外部气动力的变化并不在同一个时间尺度,也就是说,此系统的两个驱动力时间尺度并不相同.

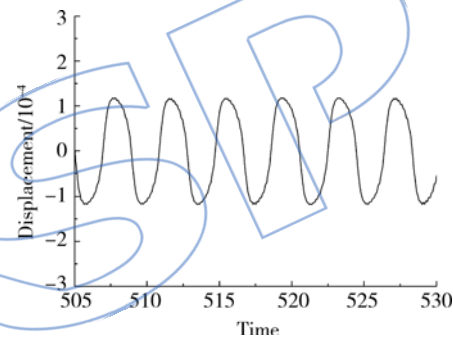


图 8 薄板振动的时间历程图

Fig. 8 Time history of the panel flutter
($Ma_\infty=5.3$, $R_f=0$, $R_u=0.15$)

固定来流马赫数 $Ma_\infty=5.3$ 不变,逐渐增大 R_u ,薄板的振动状态逐渐发生变化.当 $R_u=0$ 时,薄板在原始位置静止.当继续增大到 $R_u=0.15$,板内热应力产生的力矩对薄板振动产生比较大的影响,薄板进入振动状态.继续增大到 $R_u=0.2$,薄板振动的振幅继续增大.从薄板振动的状况可以看出,板内力矩对薄板振动虽有影响,但是主要表现在薄板的小振幅振动.图 9 给出了薄板振动状态随着 Ma_∞ 和 R_u 的变化规律.

2.4 实际薄板的振动状态

薄板的实际振动状态由气动力、惯性力、热应力产生的板内力以及板内力矩共同作用而产生的,薄板的振动会更加复杂,固定 $R_f=0.1$, $R_u=0.05$,当 $Ma_\infty<2.1$ 时,薄板处于静止状态,随着来流马赫数增大到 2.2,薄板进入振动状态,振动的时间历程图与相图参见图 10 和图 11.从图中可看出,薄板在这种情况下,振动比较复杂,通过

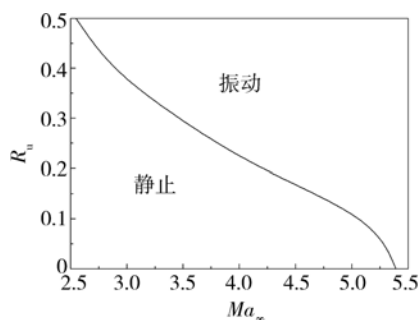
图9 薄板振动状态随 Ma_∞ 和 R_u 的变化规律

Fig. 9 Behavior of panel flutter varies as the change of parameters Ma_∞ and R_u

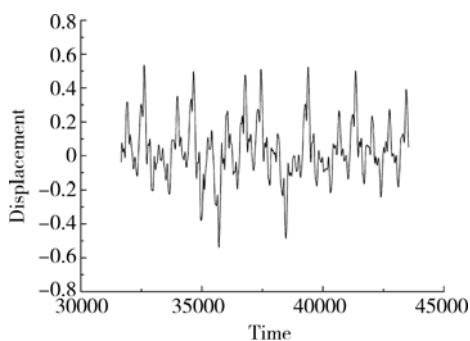


图10 薄板振动的时间历程图

Fig. 10 Time history of the panel flutter
($Ma_\infty = 2.2$, $R_t = 0.1$, $R_u = 0.05$)

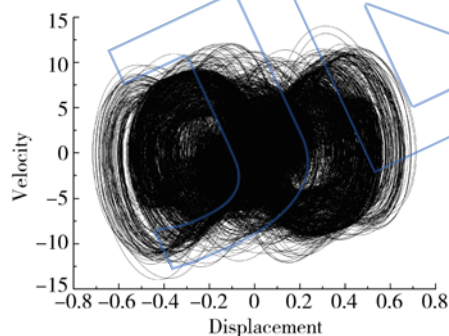


图11 薄板振动的相图

Fig. 11 Phase portrait of the panel flutter
($Ma_\infty = 2.2$, $R_t = 0.1$, $R_u = 0.05$)

求得系统此时的最大 Lyapunov 指数,发现其值大于零,也就是说,从非线性动力学的角度来说,此时薄板振动进入混沌状态。

3 结 论

通过上面的数值结果可以发现,考虑了传热的时滞效应后,三个独立的参数 Ma_∞ , R_t , R_u 分别控制着影响薄板振动的三个因素:外部气动力,薄板内力,薄板的弯曲力矩。外部气动力是薄板振动的主要驱动力,来流马赫数越大,外部气动力越

大,振动越剧烈。热应力产生的薄板内力的效果与外加预紧力相当,在相同的来流马赫数下,此薄板内力是不随时间变化的,其主要作用会使薄板在原始平衡位置不稳定,而极易进入屈曲状态。热应力产生薄板弯曲力矩随着时间变化,主要作用是使薄板产生小振幅振动,但是由于弯曲力矩的变化与气动力的变化不在同一个时间尺度,所以弯曲力矩的加入,导致薄板振动更加复杂。最后,综合了以上三种因素,模拟了薄板在实际情况下的振动,发现薄板在其他参数确定的情况下,随着来流马赫数的增大,其振动行为会进入混沌的状态。

参考文献:

- [1] Dowell E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate[J]. AIAA Journal, 1966, 4(7): 1267-1275.
- [2] Dowell E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate II: quasi-steady aerodynamic and Von Karman large deflection plate theory equations of nonlinear oscillations of fluttering plate for single mode subsonic and sonic or coupled mode supersonic oscillations[J]. AIAA Journal, 1967, 5(10): 1856-1862.
- [3] Librescu L. Linear/nonlinear supersonic panel flutter in a high-temperature field[J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(4): 918-924.
- [4] Pourtakdoust S H, Fazlzadeh S A. Nonlinear aerothermoelastic behavior of skin panel with wall shear stress effect[J]. Journal of Thermal Stress, 2005, 28(2): 147-169.
- [5] Shubov M A. Flutter phenomenon in aeroelasticity and its mathematical analysis[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2006, 19(1): 1-12.
- [6] Sipic S R. The chaotic response of a fluttering panel: the influence of maneuvering[J]. Nonlinear Dynamics, 1990, 1(3): 243-264.
- [7] Sipic S R, Morino L. Dynamic behavior of the fluttering panel on a maneuvering airplane[J]. AIAA Journal, 1991, 29(8): 1304-1312.
- [8] Gee D J, Sipic S R. Coupled thermal model for nonlinear panel flutter[J]. AIAA Journal, 1999, 37(5): 642-650.
- [9] LI Kailun, ZHANG Jiazhong, LEI Pengfei. Simulation and nonlinear analysis of panel flutter with thermal effects in supersonic flow[M] // Dynamical Systems. New York: Springer, 2010: 61-76.
- [10] Schlichting H. Boundary-layer theory[M]. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [11] Ashley H, Zartarian G. Piston theory: a new aerodynamic tool for the aeroelastician[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1956, 23(12): 1109-1118.
- [12] Hildebrand F B. Advanced calculus for applications[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.